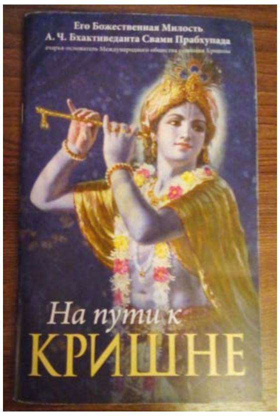
Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
Шишанину Андрею Олеговичу
Каждый его семинар был как праздник
Я приходил и узнавал что-то новое про Индию или матфизиков
А какие книжки он нам подарил в конце!



Благодаря ему и появились методички по электроду
Потому что к третьему семинару мне стало плохо от его объяснений электрода (точнее, отсутствия объяснения)
Захотелось объяснить нормально, и я сел писать в Ворде
А весь 6-й семестр электрод учил по семинарам Чугреева, а на семинары Шишанина приходил чисто поугорать
А ещё Андрей Олегович нам конфеты дарил!
Очень интересный и светлый человек
Легенда!!!
Ты навсегда в наших сердцах

Порядок прописанных вопросов:
1, 2, 4, 3, 13, 5

1.1. Усреднение микроскопических уравнений Максвелла. Векторы поляризации и намагниченности среды.

У нас есть некое вещество, которое мы поместили под внешнее электрическое магнитное поле. Это внешнее поле описывается $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (в вакууме они равны E и B). Мы туда засунули кусочек вещества. Например, мы находимся над землёй вблизи шпиля Останкинской телебашни, откуда во все стороны уходит «Время» с Екатериной Андреевой (это мощные электромагнитные волны), а мы машем вокруг шпиля кусочком, например, деревянным бруском.
Вещество состоит из атомов и молекул. Под действием электрического поля электронные оболочки поляризуются, а под действием магнитного поля электронные оболочки начинают вращаться. Тем самым вещество создаёт своё электрическое и магнитное поле.
Собственное электрическое поле вещества – это какой-то вектор. Обозначим его $4\pi(-\mathbf{P}(\mathbf{r}, t))$.
Собственное магнитное поле вещества – это также какой-то вектор. Обозначим его $4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$.

Почему 4π? А это вечная проблема. Определишь так – вылезет в одном месте, определим так – вылезет в другом. Мы могли бы ввести вектора **-P** и **M** без ввода 4π, но тогда он вылезет в другом месте.
Почему у **P** минус, скажу чуть позже.
Суммарное магнитное поле внутри бруска будет сумма поля от телепередачи $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и поля от атомов дерева $4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Это суммарное поле обозначим как $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и оно представляет собой сумму двух полей: $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)+ 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$.
Аналогично суммарное электрическое поле будет сумма поля от телепередачи $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и поля от дерева $4\pi(-\mathbf{P}(\mathbf{r}, t))$. Это суммарное поле обозначим как $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и оно представляет собой сумму двух полей: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)+ 4\pi(-\mathbf{P}(\mathbf{r}, t))$.

Итак, формулы:
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$.
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + 4\pi(-\mathbf{P}(\mathbf{r}, t))$.

Вопрос 1: если вы экспериментально захотите померить электрическое и магнитное поле внутри бруска
(электрическое – как отношение силы Кулона к пробному заряду, магнитное – как отношение силы Ампера, действующее на маленькое колечко с током, к его магнитному моменту)
Что вы измерите – E, B, D, H?
Ответ: именно **E** и **B** – суммарное итоговое поле! На точечный заряд действует и внешнее поле, и поляризованные атомы, и мы измерим именно суммарное поле. На колечко с током действует и внешнее поле, и атомы с вращающимися электронами, и мы измерим именно суммарное поле.

Вопрос 2: а почему в одном случае знак плюс, а в другом минус? Почему у вектора **P** вообще этот минус торчит?
Ответ: очень важный вопрос. Иногда бывает, что «исторически сложилось», причём исторически сложилось не совсем удачно. Было бы удобнее, если бы в физике вместо вектора **P** был вектор **Ь**, равный по определению **–P**. Тогда везде были бы плюсы:
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$.
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{Ь}(\mathbf{r}, t)$.

Однако, как правило, среда (диэлектрическая) ***электрическое*** поле ослабляет, а не усиливает. **P** будет величиной положительной, а **Ь** отрицательной. Поэтому и предпочли в итоге P, а не Ь:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)= \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$.

Иная ситуация с магнетизмом. Большинство сред почти не меняют магнитное поле, но есть такие вещества – ферромагнетики – которые его как резко усиливают. Представим себе катушку с железным сердечником. Ток по виткам создал внутри поле **H** (по закону Био-Савара-Лапласа), сердечник его усилил (в очень грубом приближении можно считать для ферромагнетиков **M**=(μ-1)**H**, где μ очень велико), и итоговая магнитная индукция **B** (которая тогда будет μ**H**) будет очень большой. И если мы начнём мерить силу Лоренца или Ампера внутри сердечника, мы получим ахренеть как много, хотя витки нам создали не так уж и много напряжённости. Как говорится, **H** создаётся, а **B** действует (и именно её мы поэтому меряем экспериментально).

Внешнее поле	Среда добавила	Итого в среде получили
H	4π**M**	**B**
D	4π**Ь** (или отняла 4π**P)**	**E**

Как мы видим, последствием неудачного знака у P стала путаница с тем, что понятия индукции и напряжённости оказались перепутанными для электричества и магнетизма. Исторически фигово сложилось, да.

Небольшое отвлечение от темы: давайте поговорим об усреднении. Поле внутри среды, конечно, неоднородное: у нас вещество не однородно, а есть ядра, есть электронные оболочки и много пустоты. Поле около ядер просто зашкаливает, а в вакууме поменьше. Можно ли как-то считать его однородным?
Наиболее простой способ – усреднение по пространству.
Если мы ходим узнать u где-то, то вместо u удобнее работать со средним значением u

$$\langle u \rangle = \frac{1}{V}\int_V u\,dV$$

Где интегрирование производится по объёму V, окружающему точку. Размеры этого объёма примерно равны объёму, приходящемуся на 1 атом. Это усреднение решает проблему неоднородности поля. В частности, уравнения Максвелла в среде (они ещё называются ур-ями Максвелла-Лоренца) мы будем писать для усреднённых величин.

Отвлечение закончено, теперь давайте двинемся к уравнениям Максвелла для сред (их ещё называют уравнениями Максвелла-Лоренца). Чему равно суммарное поле в среде? **E** и **B**. Пишем для них уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\{<\vec{j}_{\text{своб}}> + <\vec{j}_{\text{связ}}>\} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\{<\rho_{\text{своб}}> + <\rho_{\text{связ}}>\}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Они по-прежнему верны и в среде! Причина, по которой мы хотим их переписать, такова: работать со связанными зарядами и токами очень неудобно, и мы очень хотим от них избавиться.

В первом уравнении $\operatorname{rot} \vec{B}$=rot(**H**)+rot(4π**M**). Угадайте, какому слагаемому соответствует $4\pi\mathbf{j}_{\text{своб}}$, а какому $4\pi\mathbf{j}_{\text{связ}}$? Ну конечно, **H** от внешних (свободных) зарядов, а **M** – это токи у атомов (конечно, связанные, потому что атомы сидят на месте). Давайте выкинем $4\pi\mathbf{j}_{\text{связ}}$, тогда из левой части выкинется создаваемое ими магнитное поле rot(4π**M**) и останется лишь rot(**H**). Получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

(**j** и ρ без индекса Денисов и Соколов обозначают именно всё, связанное со свободой).

Аналогичную процедуру проделаем и со вторым уравнением: div **E** = div **D** + div (4π**Ь**), выкидываем из левой части div (4π**Ь**), из правой $4\pi\rho_{\text{связ}}$ – и вот

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho,$$

А в третьем и четвёртом уравнении ничего связанного нет, их можно и не менять.

Поздравляю, мы получили уравнения Максвелла-Лоренца:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Теперь вы, если что, сможете быстро их написать на экзамене, написав сначала для **E** и **B**, а потом «усушив» первые два уравнения.

На самом деле практически так же их и получают Денисов с Соколовым, только они не указывают физический смысл . И, кстати…

1) $<\vec{e}>=\vec{E}$ - макроскопическая напряженность электрического поля,
2) $<\vec{h}>=\vec{B}$ - макроскопическая индукция магнитного поля,
(учебник Соколова, верх 80-й страницы)
Не смущает, что среднее значение **h** он обозначает как **B**? А потому что изначально нужно было писать для E и B ☺ Ну вот он на этапе усреднения исправляется.
И там же, чуть ниже

$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$ - вектор электрической индукции.
$\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{M}$ - вектор напряженности магнитного поля.

Что лишь подтверждает мои слова, что братья D и H, потому что вводит Соколов их вместе и одновременно ☺ А знаки у них разные из-за «неправильного» знака у P.

1.2. Материальные уравнения для полей в покоящемся веществе.

Среды делятся на изотропные и на неизотропные.
В изотропных средах всё просто: отклик среды прямо пропорционален внешнему полю.
Тогда… открываем учебник Соколова и видим

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \ \vec{B}=\mu\vec{H}.$$

Ну кхм! Формально оно верно, но вот ***физический смысл у этих уравнений разный***.
Разберём сначала второе уравнение: внешнее поле (от телепередачи, или от витков катушки, в зависимости от того, какой вам опыт больше нравится ☺) было **H**, среда магнитное поле **УСИЛИЛА** в μ раз, получили **B**.

В случае с первым уравнением было изначально **D**, пришла среда, **ОСЛАБИЛА** поле в ε раз, в итоге поле усохло до **D**/ε, и именно это и есть **E**, которую мы померяем экспериментально. Таким образом, было бы правильней писать **E**=**D**/ε.

Если среда неизотропная, то

$$D^{\alpha}=d^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha\beta}E_{\beta}+\omega^{\alpha\beta}H_{\beta}+\ldots,$$

$$B^{\alpha}=b^{\alpha}+\mu^{\alpha\beta}H_{\beta}+\lambda^{\alpha\beta}E_{\beta}+\ldots.$$

В третьем слагаемом опять поленились написать знак суммирования по β.
Как вы понимаете, в первой строчке поменять бы буквы «E» и «D», а «ε» на «ы», но

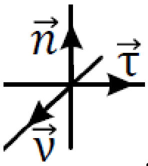
Первое слагаемое в обоих выражениях – остаточная индукция. Остаточная электрическая индукция есть у сегнетоэлектриков (вспомните 302-й прак), магнитная – у ферромагнитиков.
Если её нет, то для любые среды, если поле слабое, можно считать изотропными. Именно поэтому, хотя многие среды на самом деле неизотропны (например, кристаллы, или то же дерево, ДСП, бумага и прочий картон), при малых полях (а сильные поля у нас разве что только в лабораториях) можно считать изотропными. Поэтому дальше мы будем отдельно рассматривать изотропные среды, посмотрим, какая там будет скорость э/м волн и чему равны там φ и **A**.

Напоследок замечу, что
M=**m**n
P=**p**n
Поле реакции среды определяется как произведение магнитного момента каждого атома (дипольного момента каждого атома) на концетрацию. Среда реагирует тем сильнее, чем сильнее момент от каждого атома и чем чаще эти атомы понапиханы. Ради того, чтобы в этих уравнениях не было коэфа, мы и вынуждены писать 4π в других местах. Вот так ☺

1.4. Граничные условия для полей в покоящейся кусочно-однородной среде.

$$E^I_\tau = E^I_\tau\Big|_\Gamma, \quad E^I_\nu = E^I_\nu\Big|_\Gamma, \quad \left(D^I_n - D^{II}_n\right)\Big|_\Gamma = 4\pi\rho_{\text{пов}},$$

$$B^I_n\Big|_\Gamma = B^{II}_n\Big|_\Gamma, \quad \left[\vec{n}, \vec{H}^{II} - \vec{H}^I\right]\Big|_\Gamma = \frac{4\pi}{c}\vec{i}_{\text{пов}}.$$

τ и ν – оси в плоскости касания сред: 

.

А как же это всё доказывается? Берутся уравнения Максвелла-Лоренца в интегральном виде:

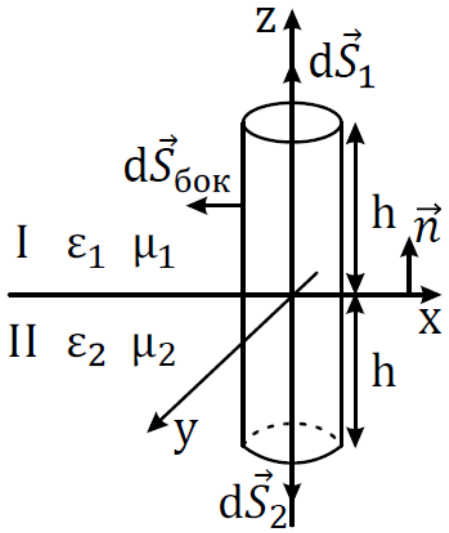
$$\begin{cases} \oint\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \\ \oint\limits_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi Q, \\ \oint\limits_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}), \\ \oint\limits_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S (\vec{D}, d\vec{S}) \end{cases}$$

Их четыре – про каждое из E, B, D, H. Чтобы доказать какое-то ГУ из списка

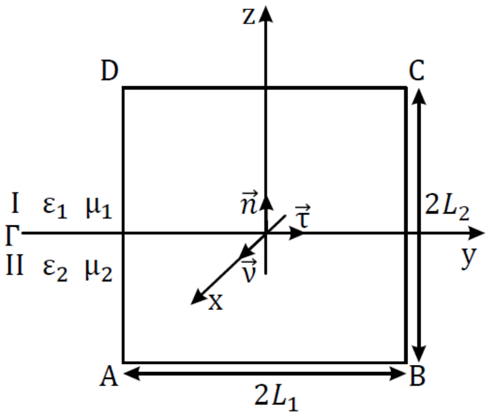
$$E_\tau^I = E_\tau^I\big|_\Gamma, \quad E_\nu^I = E_\nu^I\big|_\Gamma, \quad (D_n^I - D_n^{II})\big|_\Gamma = 4\pi\rho_{\text{пов}},$$

$$B_n^I\big|_\Gamma = B_n^{II}\big|_\Gamma, \quad [\vec{n}, \vec{H}^{II} - \vec{H}^I]\big|_\Gamma = \frac{4\pi}{c}\vec{i}_{\text{пов}}.$$

нужно взять соответствующее интегральное уравнение Максвелла-Лоренца, содержащую это букву. Например, если мы доказываем ГУ с B и D, то нам нужно рассматривать вот эти уравнения $\oint\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \ \oint\limits_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi Q,$, где интеграл берётся по площади, в качестве которой берётся вот такой цилиндр



. А если мы доказываем ГУ с E и H, то нам необходимы уравнения $\oint\limits_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}),$ $\oint\limits_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S (\vec{D}, d\vec{S}),$ … так, нет, занулим производные по времени: $\oint\limits_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad \oint\limits_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I$, где интеграл уже берётся по контуру, а в качестве контура берётся вот такой вот квадрат:



1.3. Уравнения для потенциалов в однородном покоящемся веществе. Калибровочная инвариантность. Решение в виде запаздывающих потенциалов.

Пусть у нас изотропная среда. Давайте посмотрим, что будет с φ и A.
Вы удивитесь, но тут всё просто.
Вспомним, что в вакууме

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Как мы уже выяснили, лучше вместо H писать B – это «истинная» величина, показывающее магнитное поле, от всевозможных источников, включая магнитных:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Так вот, ровно эти же формулы (с E и B) верны и для сред! А что – ведь E и B есть как раз величины, характеризующее поле от ***чего-то***. Что это ***что-то*** – свободные заряды, связанные – вообще не важно. Поле создано, мы его можем экспериментально померить и ввести два потенциала, его описывающее.

Единственное новое – это то, что мы можем выразить через **A** и φ вдобавок ещё два других вектора – **D** и **H**. Ведь именно эти вектора определяют внешнее поле. Вот у нас есть брусок и мы облучаем внешним полем с **D** и **H** (и даны именно они). Нам интересно, какие будут **A** и φ внутри.

Соколов для простоты рассматривает только изотропные среды. Там всё проще некуда. Берём готовые выражения

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

И вспоминаем, что **H**=**B**/μ, **D**=**E**/ы=**E**ε. Первое выражение делим на μ, второе на ы (или домножаем на ε). Получаем

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}. \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon\left\{-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}$$

Волновые уравнения будут

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}.$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

полностью идентичны электроду-5, за исключением того, что:

1) Скорость распространения излучения в однородной изотропной среде: $c \to \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

2) Эффективные источники в уравнениях для потенциалов: $\vec{j}_{\text{полн}} \to \mu\vec{j}_{\text{своб}}$, $\rho_{\text{полн}} \to \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon}$.

Решения в виде запаздывающих потенциалов

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\int dV'\frac{\rho(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|\sqrt{\varepsilon\mu}}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{c}\int dV'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|\sqrt{\varepsilon\mu}}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

1.13. Уравнение для макроскопической э/д в ковариантном виде.

«В ковариантном виде» значит «в СТОшном», т.е. через 4-векторы и 4-двензоры.

Вспомним, что было в электроде-5:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x^n} + \dfrac{\partial F_{kn}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial F_{ni}}{\partial x^k} = 0, \\ \dfrac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\dfrac{4\pi}{c}j^i. \end{cases}$$

Где:

F^{ik} (с верхними или нижними индексами) – двензор электромагнитного поля,

j^i - 4-вектор плотности тока (содержащий и объёмную плотность зарядов ρ, и плотность тока **j**)

В электроде-6 почти то же самое, только под j^i нам хотелось бы понимать не полный ток, а только ток внешних (свободных) зарядов. Соответственно, нам нужно «усушить» j^i, вычтя оттуда связанные заряды среды. Тогда мы должны усушить и левую часть второго уравнения: вместо F^{ik} там будет Q^{ik}:

Где

$$Q^{ik} = F^{ik} + 4\pi M^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{kn} = \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ p_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}$$

Небольшой вопрос, который мог у вас возникнуть:

$Q^{ik} = F^{ik} + 4\pi M^{ik}$, получается, переходя от F к Q, мы не уменьшаем, а увеличиваем! Ответ см. в вопросе 1: у поляризации P исторически был криво выбран знак, поэтому «кривой» знак и у M^{ik}.

В итоге получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x^n} + \dfrac{\partial F_{kn}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial F_{ni}}{\partial x^k} = 0, \\ \dfrac{\partial Q^{ik}}{\partial x^k} = -\dfrac{4\pi}{c} j^i. \end{cases}$$

Где j^i на сей раз – объёмная плотность и плотность тока только свободных, внешних зарядов. Первое уравнение осталось неизменным, потому что там ничего «усушать» не надо.

1.5. ЗСЭ в электродинамике покоящихся сред.

Закон сохранения энергии в дифференциальной форм

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} + (\vec{j}, \vec{E}) = 0.$$

Закон сохранения энергии в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V w dV + \oint\limits_S (\vec{\sigma}, d\vec{S}) + \int\limits_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = 0.$$

Первое слагаемое, $\frac{\partial w}{\partial t}$ есть скорость изменения объёмной энергии в данной точке.

Второе - $\operatorname{div} \vec{\sigma}$ - есть поток Умова-Пойтинга из этой точки, уносящий или приносящий энергию. В интегралом виде $\oint\limits_S (\vec{\sigma}, d\vec{S})$ это ещё заметнее.

Третье слагаемое - $(\vec{j}, \vec{E})$ есть джоулево тепло, вырабатываемого в каждой точке. (Если вы вспомните, что **E**=ρ***j**, где ρ есть удельное сопротивление, то формулу $P=j^2\rho$ (аналог $P=I^2R$) вы помните точно).

Так что ЗСЭ утверждает, что скорость плотности энергии = -(дивергенции вектора Умова-Пойтинга) – джоулево тепло. Очень логично!

Напомним, кстати, формулы для вектора Умова-Пойтинга:

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$$

И для плотности энергии:

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}$$ (но я рекомендую запомнить формулу покрасивее: $w = \frac{ED+BH}{8\pi}$.